数理解析研究所講究録
114巻 1971年 1-4

$\mathcal{C}$ の flabbyness と Radon 変換

東大数学科　柏原正樹

1969年に佐藤幹夫先生によって建設され始めた$\mathcal{C}$の理論は，1970年初頭には既に偏微分方程式への応用に十分な程度に一般論が完成して，佐藤の基本定理を始め多くの結果が得られ始めていた。$\mathcal{C}$の理論を構成する際に用いられた事実は，$\mathcal{O}$の flabby dimension が n である事（即ち Malgrange の定理）及び $\mathcal{A}$ の flabby dimension が 1 である事（即ち Grauert の定理），stein 多様体の基本定理，及び Edge of the wedge theorem（の version）だけであり，それらを曰ゆる General nonscense によって組み合せ肉付けして$\mathcal{C}$の理論が得られたのである。$\mathcal{C}$の一般論ができた後も，$\mathcal{C}$が flabby であるかどうかについては仲々結論がでず，一時は$\mathcal{C}$の flabbyness が疑われた時期さへあった。しかし，最近$\mathcal{C}$の

flabbyness が 2つの方法で証明できた。第一の方法は，$\mathcal{C}$ の flabbyness を，S^*M の convex set を support とする relative cohomology の vanishing に帰着させるもので，最初に得られた証明はこの方法であった。第二の方法は，$\mathcal{C}$ の flabbyness を $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ の flabbyness に帰着させようというもので，こちらの方が第一の方法に較べてはるかに容易にできる。しかし，第二の方法は，第一の方法の延長として得られた δ 函数の色々な分解公式をもってして初めて遂行できるのである。

どちらの方法をとるにしても，Radon 変換と $\mathcal{C}$ の理論の関係に注目しなければならないのである。

M を n 次元実解析多様体，$N=S^*M$ をその cotangential sphere bundle，$\pi: N\to M$ を projection とする。次の図式を考える。ここに Z は $N\times_M S^*M$ の diagonal である。$\mathcal{C}_N^{(i)}$ を π に関する相対 i-form (

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[d, "\pi"] & S^*N \arrow[l] & N\times_M S^*M \arrow[l] \arrow[d, "\varpi"] & Z \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "\sim"'] \\
M & & S^*M \arrow[ll, "\pi"] &
\end{tikzcd}
$$

C_Nを係数とする）のつくる層とする。その時，
De Rham 列

$$0 \to \varpi^{-1}C_M \to C_N \xrightarrow{d_\pi} C_N^{(1)} \xrightarrow{d_\pi} \cdots \xrightarrow{d_\pi} C_N^{(n-1)} \to 0$$

は exact である。それから exact sequence

$$0 \to \Gamma_Z(C_N) \xrightarrow{d_\pi} \Gamma_Z(C_N^{(1)}) \xrightarrow{d_\pi} \cdots \xrightarrow{d_\pi} \Gamma_Z(C_N^{(n-1)}) \to \varpi^{-1}C_M|Z \to 0$$

を得る。
これを ϖ（π でも同じことに注意せよ。Z上では $\varpi = \pi$）で S^*M に落して

$$(*)\quad 0 \to \varpi_* \Gamma_Z(C_N) \xrightarrow{d_\pi} \varpi_* \Gamma_Z(C_N^{(1)}) \xrightarrow{d_\pi} \cdots \xrightarrow{d_\pi} \varpi_* \Gamma_Z(C_N^{(n-1)}) \to C_M \to 0$$

は exact である。
最後の

$$\varpi_* \Gamma_Z(C_N^{(n-1)}) \to C_M$$

は，π に沿った積分 $\int$ で与えられる。
従って，これは，C_M の section を S^*方向の singularity に分解できる事をあらわしている。
第一の方法は，任意の S^*M の closed convex set G（各 fibre が convex）に対して

$$H_G^i(S^*M\,;C_M) = 0 \quad \text{for } i > 0$$

が成立する事実を用いる。この事実から，任意の Z の closed subset G に対して

$$H^i_G(S^*N; C_N) = H^i_G(Z; \Gamma_Z(C_N)) = 0$$
$$\text{for } i>0$$

である。従って $\Gamma_Z(C_N)$ は flabby である。故に，$\Gamma_Z(C_N^{(i)})$ も flabby である。(*) の exact sequence より直ちに C_M が exact である事を得る。

才二の方法は，まづ

$$K : C_M \to (\pi_* \Gamma_Z(C_N))^l$$
$$T : (\varpi_* C_N|Z)^l \to C_M$$

という sheaf homomorphism を定義して，

$$C_M \xrightarrow{K} (\varpi_* \Gamma_Z(C_N))^l \simeq (\pi_* \Gamma_Z(C_N))^l$$
$$\to \pi_*(C_N)^l \to \pi_*(C_N|Z)^l \simeq \varpi_*(C_N|Z)^l$$
$$\xrightarrow{T} C_M$$

が identity operator になるようにする。

$\pi_*(C_N) = \mathcal{B}_N/\mathcal{O}_N$ は flabby であるから，その direct summand C_M も flabby になる。